MODEL ANTRIAN

Teori ANTRIAN

TEORI ANTRIAN

- Pendahuluan
- Sistem ekonomi dan dunia usaha sebagian besar beroperasi dengan sumber daya relatif terbatas.
- Sering terjadi orang-orang, barang-barang, atau kertas kerja harus menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan.
- Garis-garis tunggu tersebut sering disebut dengan antrian (queues).

Pendahuluan

- Contoh-contoh sistem antrian :
- Deretan mobil di traffic light,
- antrian dari penonton pada gedung teater box office,
- antrian pesawat di lapangan udara,
- kedatangan kapal di suatu pelabuhan.
- Proses daftar ulang (registrasi) mahasiswa
- Sistem dapat dirancang lebih efisien dengan menggunakan teori antrian.

Masalah waiting line (teori antrian)

1. Bagaimana menentukan tingkat layanan terbaik dalam sebuah organisasi
2. Manajer harus dapat menyusun trade-off antara biaya menyediakan layanan dengan biaya menunggu para konsumen

Contoh :

- Supermarket harus dapat menentukan berapa cash register yang harus dibuka
- Pompa bensin harus menentukan berapa banyak pompa yang harus disediakan dan berapa petugas yang harus disiapkan
- Pabrik harus menentukan berapa mekanik yang harus bertugas dalam tiap shift untuk memperbaiki mesin

Pendahuluan

- Teori antrian diciptakan tahun 1909 oleh ahli matematika bernama A.K Erlang.
- Menentukan model antrian untuk menentukan jumlah optimal dari fasilitas telepon switching yang digunakan untuk melayani permintaan yang ada.

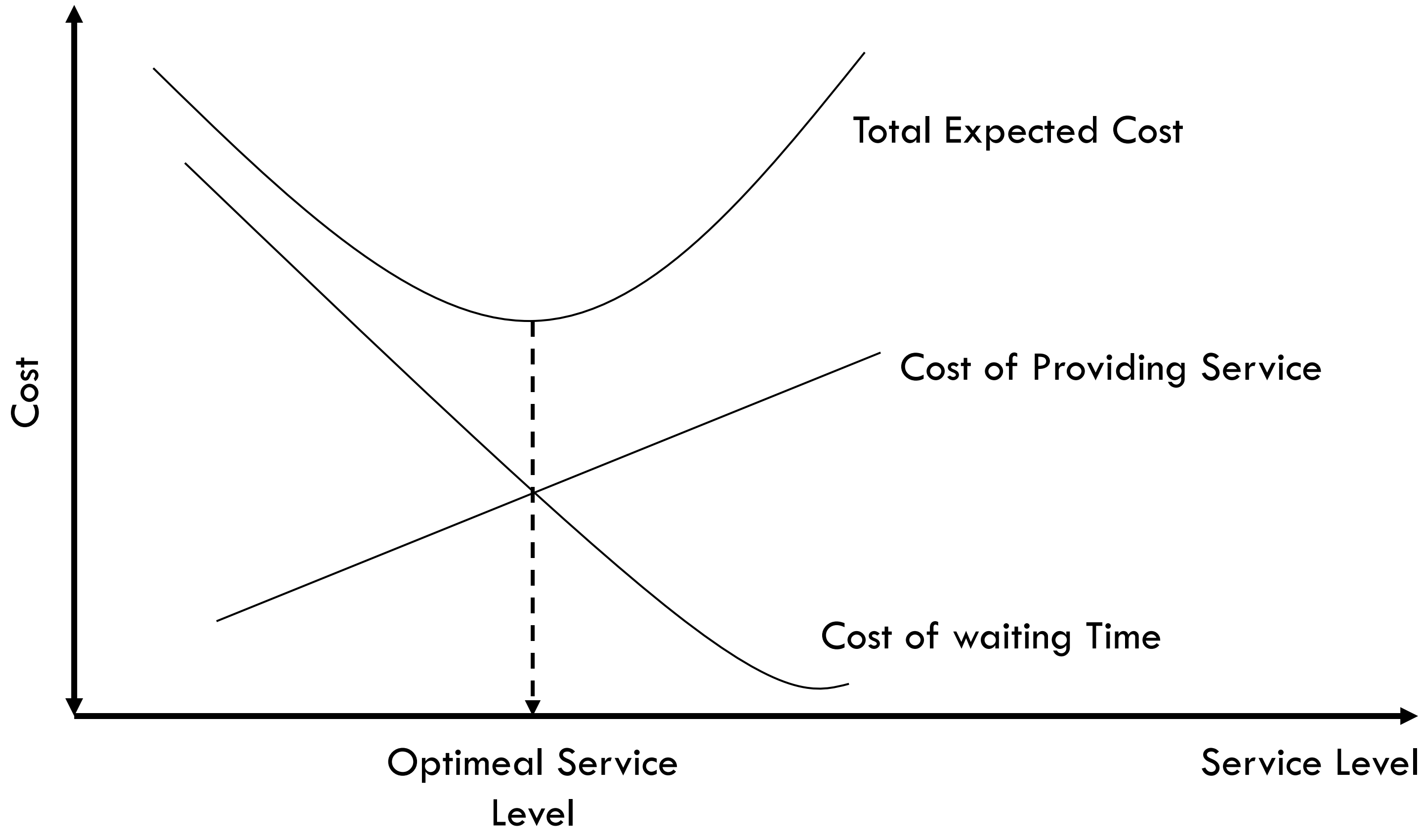
Konsep dasar Teori Antrian

- Tujuan : meminimumkan total dua biaya, yaitu :
- 1. biaya langsung penyediaan fasilitas pelayanan
- 2. biaya tidak langsung yang timbul karena para individu harus menunggu untuk dilayani.
- Jika suatu sistem mempunyai fasilitas pelayanan lebih dari jumlah optimal maka investasi berlebihan.
- Jika jumlah kurang dari optimal, maka mengakibatkan tertundanya pelayanan.

Konsep dasar Teori Antrian

- Tujuan : meminimumkan total dua biaya, yaitu :
- Biaya Menunggu : biaya menganggurnya para karyawan, kehilangan penjualan, kehilangan langganan, semua bisa terjadi jika suatu sistem mempunyai sumberdaya pelayanan yang tidak mencukupi.
- Biaya pelayanan : biaya tetap investasi awal dalam peralatan / fasilitas, biaya pemasangan dan latihan, biaya gaji karyawan, pengeluaran tambahan untuk pemeliharaan.

Salah satu cara mengevaluasi fasiitas layanan adalah dengan melihat total expected cost yang merupakan jumlah expected service cost dengan waiting cost



Contoh Kasus : Perusahaan Kapal TRS

Deskripsi		Jumlah kelompok Kuli Bongkar			
		1	2	3	3
a	Rata-rata kapal datang per shift	5	5	5	5
b	Rata-rata waktu tiap kapal menunggu dibongkar (jam)	7	4	3	2
c	Total jam kapal yang hilang (a X b)	35	20	15	10
d	Taksiran Biaya per jam waktu kapal menunggu	$1,000	$1,000	$1,000	$1,000
e	Biaya tunggu kapal (c X d)	$35,000	$20000	$15,000	$10,000
f	Upah kelompok kuli bongkar*) atau biaya pelayanan	$6,000	$12,000	$18,000	$24,000
g	Total expected Cost	$41,000	$32,000	$33,000	$34,000

*) satu kelompok kuli bongkar diasumsikan 50 orang, dengan upah $10/jam dengan 12 jam kerja /hari.

Three Rivers Shipping: Waiting Line Cost Analysis

The superintendent at Three Rivers Shipping Company wants to determine the optimal number of stevedores to employ each shift.

	Number of Stevedore Teams			
	1	2	3	4
Avg. number of ships arriving per shift	5	5	5	5
Average waiting time per ship	7	4	3	2
Total ship hours lost	35	20	15	10
Est. cost per hour of idle ship time	$1,000	$1,000	$1,000	$1,000
Value of ships' lost time	35,000	20,000	$15,000	$10,000
Stevedore teams salary	$6,000	$12,000	18,000	$24,000
Total Expected Cost	$41,000	$32,000	$33,000	$34,000

Konsep dasar Teori Antrian

- Suatu antrian terbentuk/ timbul jika jumlah pembeli tiket yang datang lebih besar daripada jumlah pembeli yang dapat dilayani dan meninggalkan loket.

- Suatu antrian terjadi bila tingkat jumlah nasabah atau sesuatu yang harus dilayani lebih besar daripada jumlah tingkat pelayanannya.

- Model antrian merupakan sistem pengelolaan yang menguntungkan dengan menghilangkan antrian.

- Sistem antrian dapat sederhana atau sangat kompleks.

Elemen Pokok dalam sistem antrian

Input	Proses	Output
Populasi orang, barang, komponen yang datang pada sistem	→ **antri** → **Fasilitas Pelayanan** →	Populasi orang, barang, komponen yang telah dilayani
Masukan ke dalam sistem	Antrean, fasilitas pelayanan	Keluaran dari sistem

Elemen Pokok dalam sistem antrian

- 1. Sumber masukan (input)
- Suatu populasi/orang/barang/komponen yang datang pada suatu sistem untuk dilayani.
- Populasi dinyatakan besar jika populasi tersebut sebanding dengan kapasitas sistem pelayanan.
- Contoh, suatu masyarakat kecil yang terdiri dari 10.000 orang mungkin akan menjadi populasi yang tak terbatas bagi sebuah pengecer, tetapi mungkin tidak cukup besar bagi 100 shopping center yang ada

Pola Kedatangan

- Adalah cara dimana individu dari populasi memasuki sistem.
- Individu mungkin datang dengan tingkat kedatangan (arrival rate):
- 1. Konstan atau
- 2. Acak (random)

Pola Kedatangan

- Tingkat kedatangan produk-produk yang bergerak sepanjang lini perakitan produksi bersifat konstan.
- Tingkat kedatangan random seringkali mengikuti sutu distribusi probabilitas poisson. Hal ini terjadi karena distribusi poisson menggambarkan jumlah kedatangan per unit waktu bila sejumlah besar variabel-variabel random mempengaruhi tk. Kedatangan.

Karakteristik Kedatangan

- Ukuran *Calling Population* -> *terhingga* atau tak terhingga
- Pola Kedatangan dalam Sistem (dianggap random dan independen) ->

  biasanya jumlah pendatang dapat ditaksir menggunakan distribusi Poisson

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{X}}{X!}$$

- Perilaku Pendatang

Umumnya diasumsikan bahwa konsumen yang datang adalah konsumen yang sabar. Konsumen yang sabar adalah manusia dan mesin yang menunggu dalam antrian hingga dilayani dan tidak berpindah antrian.

Perilaku lain adalah Konsumen **Penolak** dan **Pengingkar**

Penolak : konsumen yang menolak untuk bergabung dengan antrian karena terlalu panjang

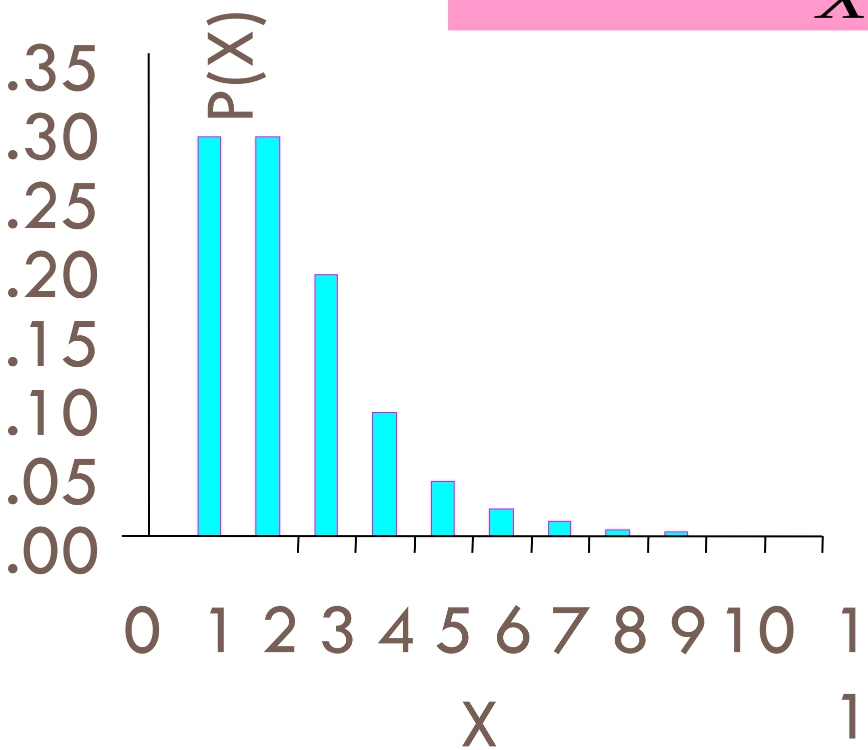
Pengingkar : konsumen yang masuk dalam antrian namun kemudian tidak sabar dan meninggalkan antrian tanpa menyelesaikan transaksi

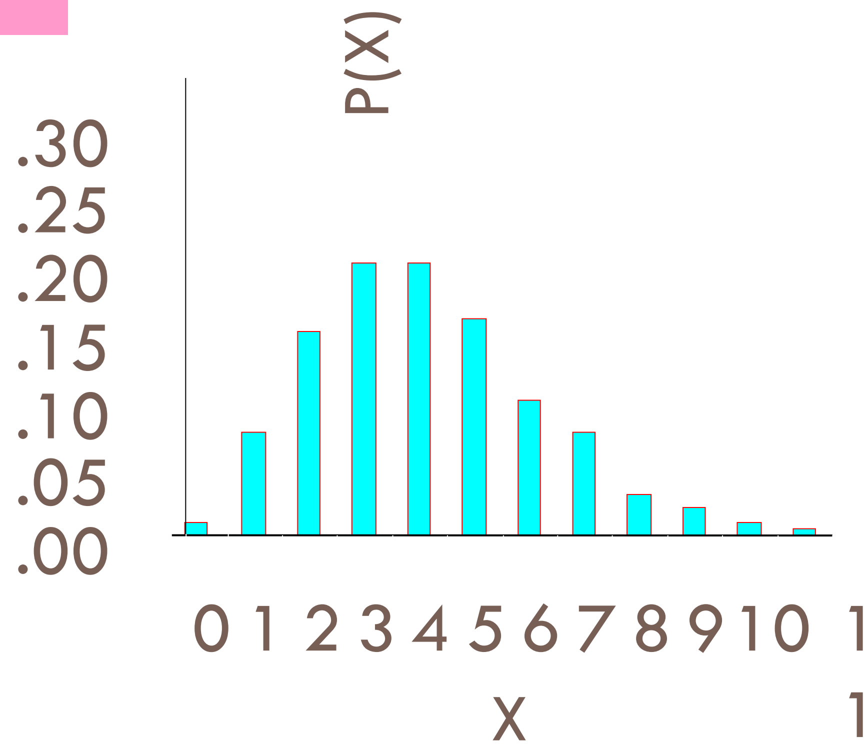
Arrival Characteristics: Poisson Distribution

P(X), λ = 2

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{X!}$$

P(X), λ = 4





Pola kedatangan

- Bila individu (komponen, produk, dll) memasuki suatu sistem, mereka mungkin memperagakan suatu perilaku yang berbeda .
- Perilaku kedatangan Individu dalam sistem :
  - Join the queue, and wait till served.
  - Balk; refuse to join the line.

    (bila antrean terlalu panjang)
  - Renege; leave the line.

Karakteristik Waiting Line

- Panjang Barisan (Line) bisa terbatas atau tidak terbatas. Sebuah antrian dikatakan terbatas, jika tidak bisa ditingkatkan secara fisik.

- Contoh : restoran kecil yang hanya memiliki 10 meja dan tidak bisa lagi melayani 50 pendatang pada saat makan malam. Model analitik antrian umumnya mengasumsikan bahwa panjang barisan adalah tak terbatas.

Kepanjangan antrian

- Bila kapasitas antrian menjadi faktor pembatas besarnya jumlah individu yang dapat dilayani dalam sistem secara nyata, maka sistem mempunyai kepanjangan antrian yang terbatas (finite)..memakai model antrian terbatas.
- Contoh sistem yang mempunyai antrian terbatas :
- Jumlah tempat parkir, jumlah tempat tidur di rumah sakit, jumlah tempat minum di pelabuhan udara.

Disiplin antrian

- Menunjukkan pedoman keputusan yang digunakan untuk menyeleksi individu-individu yang memasuki antrian untuk dilayani terlebih dahulu (prioritas).
- Disiplin antrian :

1. First Come First Served (FCFS) , pertama kali datang, pertama kali dilayani.
2. Shortest Operating time (SOT), Last Come First Served (LCFS), Longest Operating Time (LOT),dsb.
3. Emergency First, Critical Condition first.

Tingkat Pelayanan

- Waktu yang digunakan untuk melayani individu-individu dalam suatu sistem disebut waktu pelayanan (service time).
- Waktu konstan, atau acak (random).
- Bila waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial atau distribusinya acak, waktu pelayanan (unit/jam) akan mengikuti distribusi poisson.

Keluar (Exit)

- Sesudah seseorang (individu) telah selesai dilayani, dia keluar (exit) dari sistem.

Ringkasan Karakteristik penting Sistem Antrian

Karakteristik Antrian	Asumsi-asumsi Umum
Sumber Populasi	Tak Terbatas atau terbatas
Pola Kedatangan	Tingkat kedatangan poisson Waktu antar kedatangan eksponensial
Kepanjangan Antrian	Tak terbatas atau terbatas
Disiplin antrian	FCFS (yg umum)
Pola pelayanan	Tk. Pelayanan poisson (waktu pelayanan eksponensial)
Keluar	Langsung kembali ke populasi

Sistem-sistem Antrian

- Klasifikasi sistem-sistem antrian menurut Hillier dan Lieberman :
- 1. Sistem pelayanan komersial
- 2. Sistem pelayanan bisnis-industri
- 3. Sistem Pelayanan transportasi
- 4. Sistem Pelayanan sosial

Sistem-sistem Antrian

- 1. Sistem pelayanan komersial : restoran, cafetaria, toko-toko, salon, supermarket,dll
- 2. Sistem pelayanan bisnis-industri : sistem material handling, pergudangan, dll
- 3. Sistem Pelayanan transportasi: stasiun kereta, bandara,dll
- 4. Sistem Pelayanan sosial: registrasi SIM, STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dll

Struktur Antrian

- Saluran (channel) menunjukkan jumlah jalur (tempat) untuk memasuki sistem pelayanan, yang juga menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan.
- Phase berarti jumlah stasion-stasion pelayanan, dimana para langganan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap.

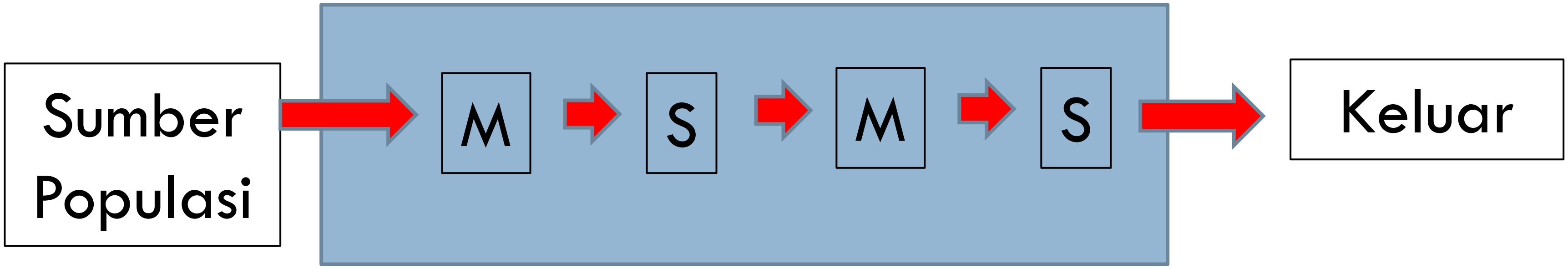
4 Model Struktur Antrian

- 1. Single Channel – Single Phase

- Sisitem antrian
- Antrian Tunggal, Fasilitas Pelayanan Tunggal

4 Model Struktur Antrian

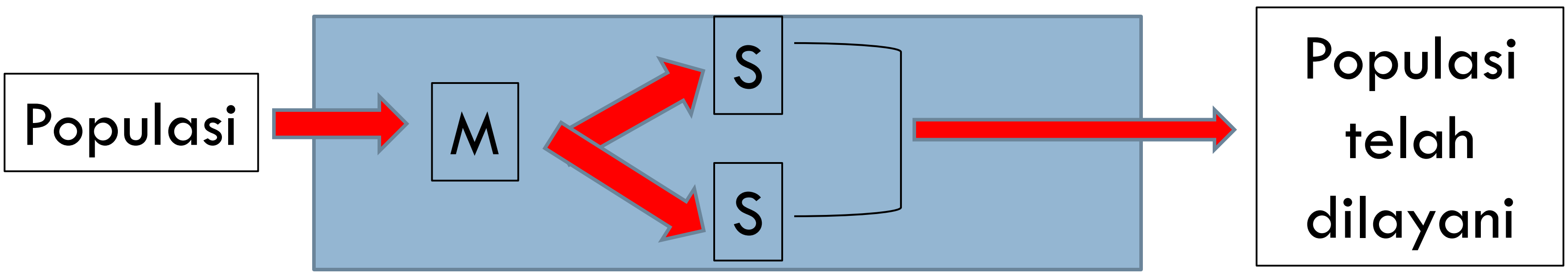
- 2. Single Channel – Multi Phase



- Phase 1 Phase 2
- M = antrian; S = fasilitas Pelayanan (server)
- Antrian Tunggal, Fasilitas Pelayanan dua atau lebih yang dilaksanakan secara berurutan.
- Contoh : Pencucian Mobil, Lini produksi massa.

4 Model Struktur Antrian

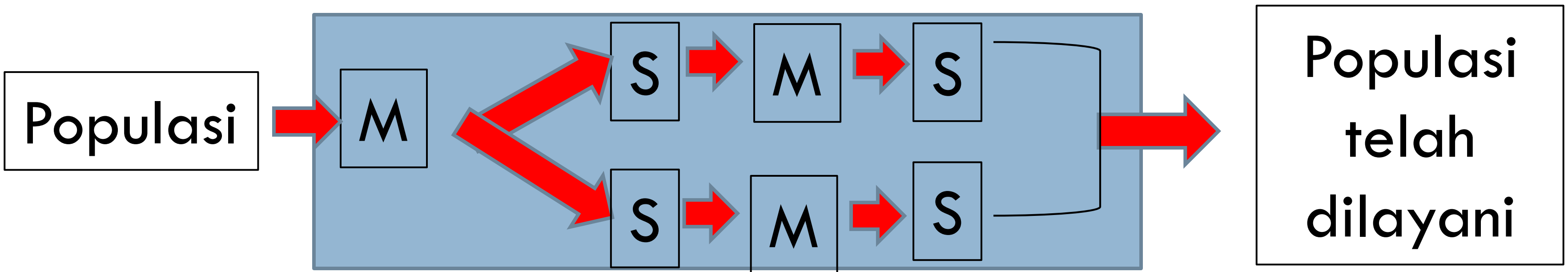
- 2. Multi Channel – Single Phase



- sistem antrian
- M = antrian; S = fasilitas Pelayanan (server)
- Terjadi (ada) kapan saja dua atau atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal
- Contoh : Pembelian tiket yang yang dilayani oleh lebih dari satu loket pelayanan, potong rambut oleh beberapa tukang potong, dsb.

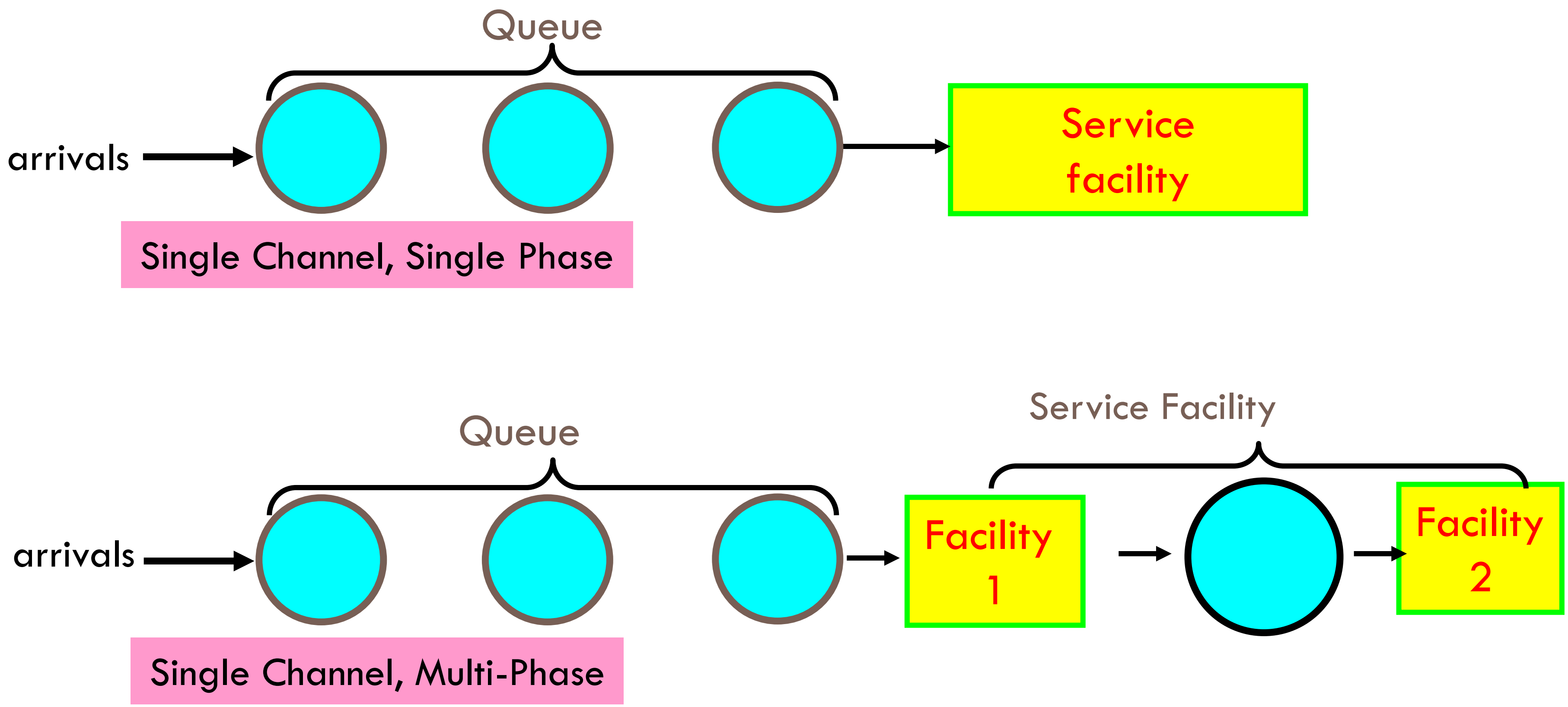
4 Model Struktur Antrian

- 2. Multi Channel – Multi Phase

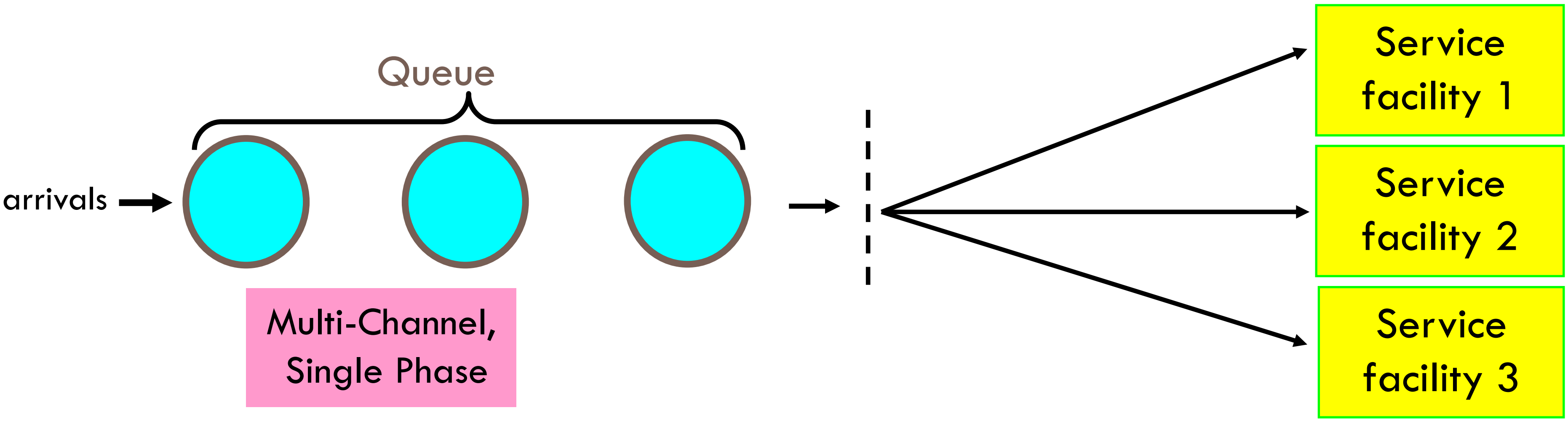


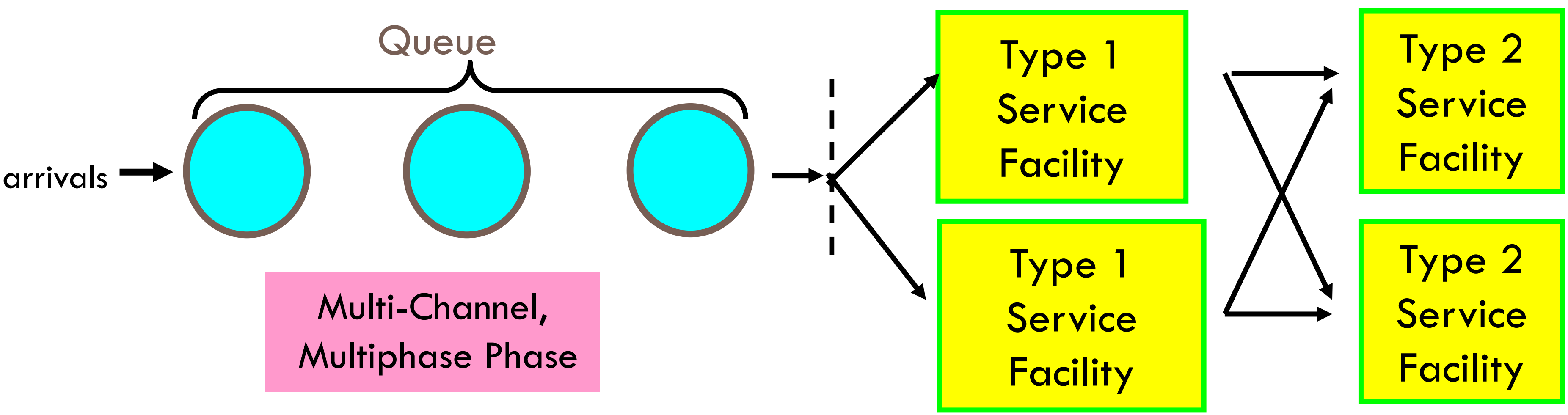
- sistem antrian
- M = antrian; S = fasilitas Pelayanan (server)
- Terjadi (ada) kapan saja dua atau atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal
- Contoh : Pembelian tiket yang yang dilayani oleh lebih dari satu loket pelayanan, potong rambut oleh beberapa tukang potong, dsb.

Service Characteristics: Queuing System Configurations



Service Characteristics: Queuing System Configurations



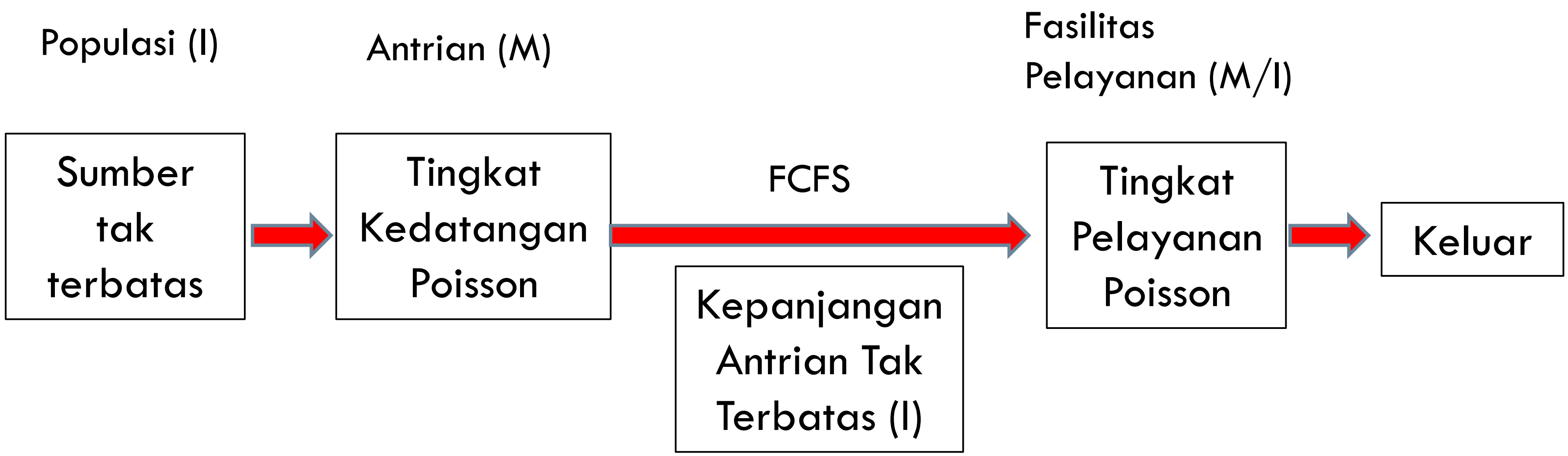


Pengelompokkan Model-Model Antrian

Dalam mengelompokkan model-model antrian yang berbeda-beda akan digunakan suatu notasi yang disebut ‘Kendall’s Notation”.

Notasi merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi tidak hanya model antrian, tetapi juga asumsi-asumsi yang harus dipenuhi.

Bentuk Model Antrian M/M/1/I/I



Bentuk Model UMUM :

Tingkat Kedatangan / Tingkat Pelayanan / Jumlah Fasilitas Pelayanan / Besarnya Populasi / Kepanjangan Antrian

Notasi dalam Penyajian Model Antrian

Bentuk Model UMUM :

Tingkat Kedatangan / Tingkat Pelayanan / Jumlah Fasilitas Pelayanan / Besarnya Populasi / Kepanjangan Antrian

Singkatan	Penjelasan
M	Tk. Kedatangan dan Pelayanan Pisson
D	Tk. Kedatangan / Pelayanan Deterministik
K	Distribusi Erlang waktu antar kedatangan atau pelayanan
S	Jumlah Fasilitas Pelayanan
I	Sumber Populasi/kepanjangan antrian tak terbatas (infinite)
F	Sumber Populasi/kepanjangan antrian terbatas (finite)

Notasi dalam Penyajian Model Antrian

Tanda Pertama menunjukkan distribusi tk. Kedatangan.

Tanda Kedua menunjukkan distribusi tk pelayanan.

Tanda ketiga menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan (channels) dalam sistem.

Tanda ke empat dan kelima menunjukkan apakah sumber populasi dan kepanjangan antrian adalah tak terbatas (I) atau terbatas (F).

Identifikasi Model (Notasi Kendal)

Tiga simbul dasar dalam notasi Kendal :

Distribusi kedatangan/Distribusi waktu layanan/jumlah jalur layanan yang dibuka

M = Distribusi Poisson untuk jumlah kejadian (atau waktu eksponensial)

D = constant rate

G = Distribusi umum dengan rata-rata dan varians diketahui

M/M/1 : model kedatangan Poisson, layanan waktu eksponensial dan 1 chanel

M/M/2 : model kedatangan Poisson, layanan waktu eksponensial dan 2 chanel

M/M/m: model kedatangan Poisson, layanan waktu eksponensial dan m chanel layanan yang berbeda

Notasi untuk Model-model antrian sumber tak terbatas

Notasi	Penjelasan	Ukuran
λ	Tk. Kedatangan rata-rata	Unit/jam
$1/\lambda$	Waktu antarkedatangan rata-rata	Jam/unit
μ	Tk. Pelayanan rata-rata	Unit/jam
$1/\mu$	Waktu pelayanan rata-rata	Jam/unit
σ	Deviasi standar rata-rata	Unit/jam
n	Jumlah individu dalam sistem pada suatu waktu	unit
$\overline{n}q$ atau Lq	Jumlah individu rata-rata dalam antrian	unit
$\overline{nt}$ atau L	Jumlah individu dalam sistem total (antrian dan fasilitas pelayanan)	unit
$\overline{t}_q$ atau Wq	Waktu rata-rata dalam antrian	jam
$\overline{t}_t$ atau W	Waktu rata-rata dalam sistem total	jam
S	Jumlah fasilitas pelayanan (channels)	Unit pelayanan

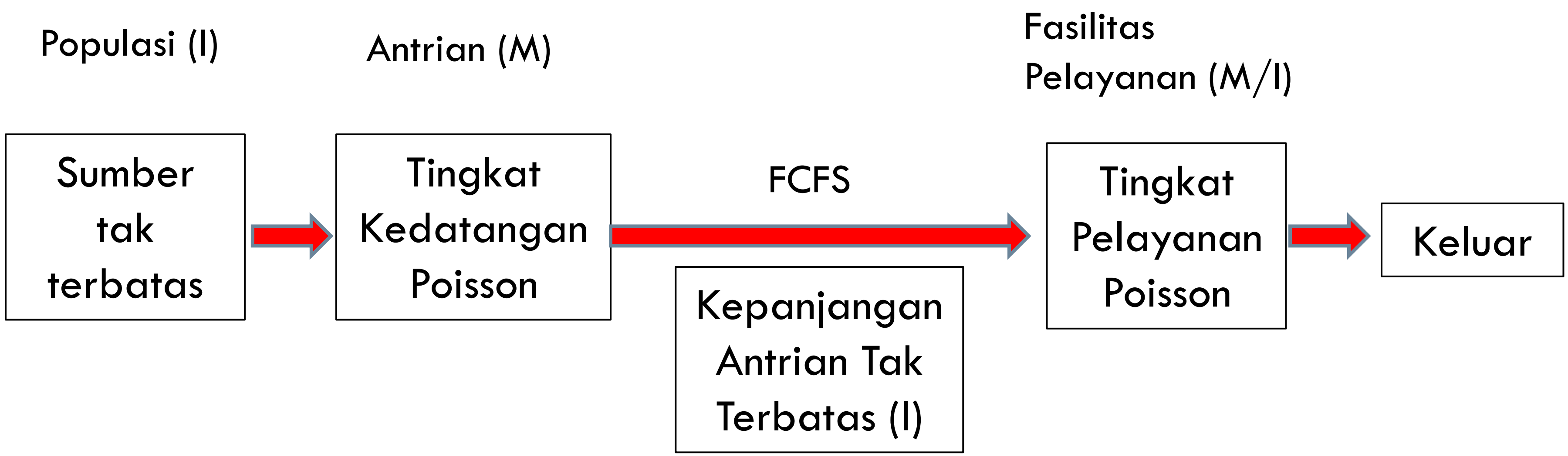
Notasi untuk Model-model antrian sumber tak terbatas

Notasi	Penjelasan	Ukuran
P atau ρ	Tingkat kegunaan fasilitas pelayanan	rasio
Q	Kepanjangan maksimum sistem (antrian plus ruang pelayanan)	Unit
Pn	Probabilitas jumlah n individu dalam sistem	Frekuensi relatif
Po	Probabilitas tidak ada individu dalam sistem	Frekuensi relatif
Pw	Probabilitas menunggu dalam antrian	Frekuensi relatif
cs	Biaya pelayanan per satuan waktu per fasilitas pelayanan	Rp/jam/server
cw	Biaya untuk menunggu per satuan waktu per individu	Rp / jam / unit
ct	Biaya total = $Sc_s + n_t c_w$	Rp / jam

Model-Model dan Aplikasinya

Hal. 277

Model M/M/1/I/I



Persamaan Antrian Model M/M/1

Misal : λ = rata-rata kedatangan per periode waktu

μ = rata-rata jumlah orang/barang yang dilayani per periode waktu

(periode waktu untuk kedatangan dan layanan haruslah sama)

Persamaan Antrian

1. Rata-rata jumlah customer atau unit dalam sistem, L, adalah jumlah yang ada

   dalam barisan ditambah jumlah yang dilayani :

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

2. Rata-rata waktu customer menghabiskan waktu dalam sistem, W, adalah waktu yang dihabiskan customer ditambah waktu yang digunakan untuk melayani :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

3. Rata-rata jumlah customer dalam antrian, L_q :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

4. Rata-rata waktu customer menghabiskan waktu dalam antrian, W_q, :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5. Faktor pemanfaatan (utilization), ρ, adalah peluang bahwa layanan sedang digunakan

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

6. Persentase waktu kosong, P_0, adalah peluang bahwa tidak ada satupun dalam sistem

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Peluang jumlah customer dalam sistem lebih besar dari k :

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Model Antrian Single Channel dengan distribusi kedatangan Poisson dan waktu layanan eksponensial (M/M/1)

Asumsi Model

- Pendatang dilayani dengan dasar FIFO
- Setiap pendatang menunggu untuk dilayani tanpa memandang panjang antrian (tidak ada penolak dan pengingkar)
- Pendatang independen dengan pendatang sebelumnya, tetapi rata-rata jumlah pendatang tidak berubah sepanjang waktu
- Pendatang dijelaskan oleh distribusi Poisson dan berasal dari populasi yang tak terhingga
- Waktu layanan bervariasi antar konsumen dan bersifat independen, namun rata-rata layanan diketahui
- Waktu layanan terjadi sesuai dengan distribusi peluang eksponensial negatif
- Rata-rata layanan lebih besar daripada laju kedatangan

Kasus Toko Saringan Mobil

Toko Mulya Motor menjual dan memasang saringan mobil. Mekanik yang ada (Mr. Blekoq) mampu memasang saringan baru dengan rata-rata waktu 3 mobil per jam atau sekitar 1 unit dalam 20 menit. Customer yang datang ke toko ini rata-rata adalah 2 mobil per jam. Sang pemilik yang sedang mengkaji teori antrian untuk menyelesaikan program MBA nya merasa bahwa 7 asumsi untuk model single channel telah dipenuhi. Oleh karena itu dia menghitung karakteristik operasi untuk model sebagai berikut :

λ **= 2 mobil per jam**

μ **= 3 mobil per jam**

Kasus Toko Saringan Mobil : karakteristik antrian

λ = 2 cars arriving per hour

μ = 3 cars serviced per hour

L => ? cars in the system on average

W => ? hour that an average car spends in the system

Lq => ? cars waiting on average

Wq => ? hours is average wait

ρ => ? percent of time car washers are busy

Po => ? probability that there are 0 cars in the system

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$$

Secara rata-rata 2 mobil dalam sistem

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$$

Rata-rata 1 jam mobil menghabiskan waktu dalam sistem

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = 1.33$$

Rata-rata 1,33 mobil menunggu dalam barisan

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$$

2/3 jam atau 40 menit rata-rata/mobil menunggu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Probabilitas pelayanan sibuk

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3} = 0.33$$

Probabilitas bahwa tidak ada (0) mobil dalam sistem

Peluang lebih dari *k* mobil dalam sistem

k	$P_{n>k}(2/3)^{k+1}$
0	0,667
1	0,444
2	0,296
3	0,198
4	0,132
5	0,088
6	0,058
7	0,039

Ini sama dengan $1 - P_0$

Mengandung arti bahwa pleuang lebih dari 3 mobil dalam sistem adalah 19,8%

Memasukkan unsur biaya dalam Model

Dua unsur biaya yang penting adalah :

1. Total Service Cost = (jumlah channel)(Biaya per channel)

$$= mC_s$$

m = jumlah channel

C = biaya service (labor cost) setiap channel

2. Total Waiting Cost = (jumlah waktu yang dihabiskan seluruh pendatang)(Biaya tunggu)

= (Jumlah pendatang)(rata-rata tunggu/pendatang)C_w.

$$= (\lambda W)C_w$$

Total Cost = Total service cost+ Total Waiting Cost

$$= mC_s + \lambda WC_w$$

Jika biaya tunggu didasarkan pada waktu dalam antrian maka :

Total Cost = $mC_s + \lambda WC_w$

Analisis Kasus Alternatif 1

- Karakteristik dari sistem antrian telah dihitung.
- Solusi dalam sistem antrian adalah dengan menentukan trade-off antara **Biaya menunggu dan Biaya pelayanan.**
- **Asumsi biaya menunggu** adalah $10/jam, rata-rata waktu menunggu adalah 2/3 jam atau 40 menit, dan jika rata-rata kedatangan mobil = 2 jam, maka terdapat 16 mobil yang terlayani per hari (2 mobil/jam x 8 jam kerja).
- **Total waktu menunggu seluruh mobil**

  = 16 mobil/hari x 2/3 jam/mobil = 32/3 = 10 2/3 jam.
- **Total Biaya menunggu** untuk seluruh mobil = $10 x 10 2/3 jam = $ 106 / hari.

Analisis Kasus Alternatif 1

- Biaya pelayanan : Biaya tenaga Kerja
- Biaya tenaga kerja = $7 / jam, maka

  Total biaya tenaga kerja = $7 x 8 jam = $56 / hari.

  Total Biaya menunggu dan biaya pelayanan =

  $106 + $ 56 = $162 / hari.

Analisis Kasus Alternatif 2

Dipertimbangkan **Alternatif 2** untuk mengganti 'car wash team' yang dapat menyelesaikan 4 mobil/jam

λ = 2 cars arriving per hour

μ = 4 cars serviced per hour

L	=>	? cars in the system on average
W	=>	? hour that an average car spends in the system
Lq	=>	? cars waiting on average
Wq	=>	? hours is average wait
Pw	=>	? percent of time car washers are busy
Po	=>	? probability that there are 0 cars in the system

Car Wash Example: Operating Characteristics Solution Alternatif 2

$$\lambda = 2 \text{ cars arriving per hour}$$

$$\mu = 4 \text{ cars serviced per hour}$$

L = 2/(4-2) => 1cars in the system on average

W = 1/(4-2) => 1/2 hour that an average car spends in the system

Lq = 2^2/4(4-2) => 1/2 cars waiting on average

Wq = 2/4(4-2) => ¼ hours or 15 minute is average wait

Pw = 2/4 => 0.5 (percent of time washers are busy)

P(0) = 1 – (2/4) => 0.5 (probability that there are 0 cars in the system)

Car Wash Example: Probability
more than k cars in the system for alternatif 1

k	$P_{n>k} = (2/4)^{k+1}$
0	0.5
1	0.25
2	0.125
3	0.062
4	0.031
5	0.016
6	0.008
7	0.004

Analisis Kasus alternatif 2

- Karakteristik dari sistem antrian telah dihitung.
- Solusi dalam sistem antrian adalah dengan menentukan trade-off antara **Biaya menunggu dan Biaya pelayanan.**
- **Asumsi biaya menunggu** adalah $10/jam, rata-rata waktu menunggu adalah 1/4 jam atau 15 menit, maka:
- **Total waktu menunggu seluruh mobil**

  = 16 mobil/hari x ¼ jam/mobil = 4 jam
- **Total Biaya menunggu** untuk seluruh mobil = $10 x 4 jam = $40 / hari.

Analisis Kasus alternatif 2

- Biaya pelayanan : Biaya tenaga Kerja
- Asumsi Biaya tenaga kerja = $9 / jam, maka

Total biaya tenaga kerja = $9 x 8 jam = $72 / hari.

Total Biaya menunggu dan biaya pelayanan =

$40 + $ 72 = $112 / hari.

Alternatif 2 lebih murah, maka lebih baik menggunakan alternatif 2 tersebut. (men'hire' car wash team yang lain)

Multiple Channels M/M/m
Jika terdapat lebih dari 1 channels dalam sistem

Jika m = number of channels open

λ = average arrival rate

μ = service rate per each channel

Probability there are no customers in the system,

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{m\mu}{m\mu - \lambda}}$$

Average number of customers in the system,

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^m}{(m-1)!\,(m\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Multiple Channels M/M/m
Jika terdapat lebih dari 1 channels dalam sistem

The average time a customer spends in the system,

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

The average number of customers in line waiting,

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

The average time a customer spends in the queue waiting for service,

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

The utilization rate,

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Car Wash Example: M/M/2

Alternatif 3 : have 2 teams of car washers

$\lambda = 2$ cars/ hr $\qquad \mu = 3$ cars/ hr

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{m\mu}{m\mu - \lambda}}$$

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^m}{(m-1)!\,(m\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Car Wash Example: M/M/2

Should you have 2 teams of car washers???

$\lambda = 2$ cars/ hr $\mu = 3$ cars/ hr

$$W = \frac{0.75}{2} = \frac{3}{4} = 22.5 \text{ minutes}$$

$$Lq = 0.75 - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$Wq = \frac{0.083}{2} = 0.0415 \text{ hour} = 2.5 \text{ minutes}$$

Analisis Kasus alternatif 3

- Karakteristik dari sistem antrian telah dihitung.
- Solusi dalam sistem antrian adalah dengan menentukan trade-off antara **Biaya menunggu dan Biaya pelayanan.**
- **Asumsi biaya menunggu** adalah $10/jam, rata-rata waktu menunggu adalah 0.0415 jam atau 2.5 menit, maka:
- **Total waktu menunggu seluruh mobil**

  = 16 mobil/hari x 0.0415 jam/mobil = 0.664 jam
- <u>**Total Biaya menunggu**</u> untuk seluruh mobil = $10 x 0.664 jam =

  $6.64 / hari.

Analisis Kasus alternatif 3

- Biaya pelayanan : Biaya tenaga Kerja
- Asumsi Biaya tenaga kerja = $7/jam, maka

Total biaya 2 tenaga kerja = 2 x $7 x 8 jam = $112 / hari.

Total Biaya menunggu dan biaya pelayanan =

$6.64 + $ 112 = $118.64 / hari.

Alternatif 3 lebih murah, maka lebih baik menggunakan alternatif 3. (mempunyai 2 tenaga kerja)

Perbandingan di antara alternatif

Karakteristik	Alternatif 1	Alternatif 2	Alternatif 3
Po			
L			
W			
Lq			
Wq			
Total Cost (find the minimum cost)			

Operating Characteristic Equations: M/D/1 Constant service time – contoh automatic car wash

Average length of the queue, $$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Average waiting time in the queue, $$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Average number of customers in the queue, $$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Average time in the system, $$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Car Wash Example: M/D/1

- Your charity is considering purchasing an automatic car wash system.
- Cars will continue to arrive according to a Poisson distribution, with 2 cars arriving every hour.
- However, the service time will now be constant with a rate of 3 cars per hour.

Compare the operating characteristics of this model with your previous models.

Car Wash Example: Operating Characteristics M/D/1

M/D/1		M/M/1
$L_q = \dfrac{4}{2(3)\,(3-2)} = \dfrac{2}{3}$	→	$\dfrac{4}{3}$ cars
$W_q = \dfrac{2}{2(3)(3-2)} = \dfrac{1}{3}$	→	$\dfrac{2}{3}$ hour
$L = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$	→	2 cars
$W = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$	→	1 hour

Both Lq and Wq are reduced by 50%!

Soal Kasus single channel M/M/1

278,pangestu

- Tuan Laon memiliki sebuah restoran yang melayani para langganannya dalam mobil mereka. Dia sangat prihatin dengan panjangnya garis antrian pada jam-jam makan siang dan makan malam. Tingkat rata-rata langganan selama periode puncak adalah 50 mobil per jam. Tk. Kedatangan mengikuti distribusi poisson. Waktu pelayanan rata-rata 1 menit dengan distribusi eksponensial. Tentukan :
- L, W, Lq, Wq, Po, ρ
- probabilitas lebih dari 1 mobil dalam sistem

Jawab

Soal Kasus Multichannel

318,;MM

- Sebuah bank swasta nasional mempunyai data tentang pelayanan tellernya sebagai berikut:

1. Jumlah counter teller = 2
2. Rata-rata seorang nasabah datang dalam waktu 5 menit = ... Jam
3. Rata-rata waktu pelayanan seorang teller = 8 menit = ... Jam.

   Tentukan : Po, L, W, lq, wq.

Jawab

Operating Characteristic Equations: M/M/1 - Finite Source

The probability that the system is empty,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

The average length of the queue,

$$L_q = N - \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)(1 - P_0)$$

The average number of customers in the system,

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

Operating Characteristic Equations: M/M/1 - Finite Source

The average waiting time in the queue,

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L)\lambda}$$

The average waiting time in the system,

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Probability of *n* units in the system,

$$P(n, \quad n \leq N) = P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Department of Commerce Example: M/M/1 – finite source

- The Department of Commerce has 5 printers that each need repair after about 20 hours of work. Breakdowns follow a Poisson distribution.
- The technician can service a printer in an average of about 2 hours, following an exponential distribution.

Determine the operating

characteristics for this model.

Operating Characteristics M/M/1 Finite source

$\lambda = 1/20 = 0.05$ printer/ hr.

$\mu = ½ = 0.50$ printer/ hr.

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{5} \frac{5!}{(5-n)!}\left[\frac{0.05}{0.5}\right]^{n}} = 0.564$$

$$Lq = 5 - \frac{0.05 + 0.5}{0.05}(1-Po) = 5 - 4.8 = 0.2$$

$$L = 0.2 + (1-0.564) = 0.64 \text{ printer}$$

$$Wq = \frac{0.2}{(5-0.64)(0.05)} = 0.91 \text{ hour}$$

$$W = 0.91 + \frac{1}{0.50} = 2.91 \text{ hours}$$

General Operating Characteristic Relationships

After reaching a steady state, certain relationships exist among specific operating characteristics.

Little's Flow Equations :

$$L = \lambda W \qquad (\text{or } W = \frac{L}{\lambda})$$

$$L_q = \lambda W_q \qquad (\text{or } W_q = \frac{L_q}{\lambda})$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$